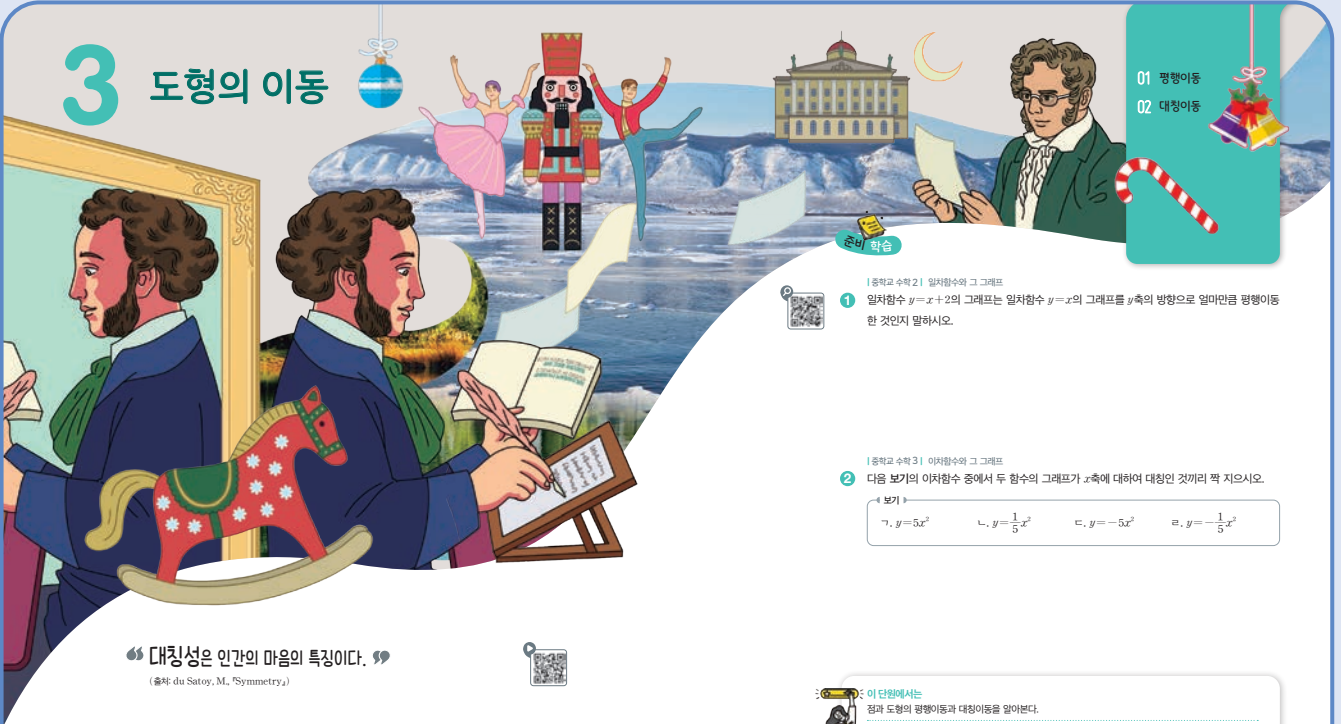


3 도형의 이동



01 평행이동
02 대칭이동

준비 학습

[중학교 수학 2] 일차함수와 그 그래프

1 일차함수 $y=x+2$ 의 그래프는 일차함수 $y=x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 말하십시오.

[중학교 수학 3] 이차함수와 그 그래프

2 다음 보기의 이차함수 중에서 두 함수의 그래프가 x 축에 대하여 대칭인 것끼리 짝 지으시오.

◀ 보기 ▶

ㄱ. $y=5x^2$ ㄴ. $y=\frac{1}{5}x^2$ ㄷ. $y=-5x^2$ ㄹ. $y=-\frac{1}{5}x^2$

이 단원에서는

점과 도형의 평행이동과 대칭이동을 알아본다.

스스로 세우는 학습 계획 배 개념을 충분히 이해하고, 예제를 완벽히 풀겠다.

“대칭성은 인간의 마음의 특징이다.”

(출처: du Sautoy, M., "Symmetry")

알렉산드르 푸시킨(Alexander Pushkin, A., 1799~1837)
러시아 근대 문학의 창시자로 알려진
시인이자 소설가

이 글은 푸시킨이 절친한 친구이자 동료 시인인 러시아의 왕자 바렝스키(Vyazemsky, P. A., 1792~1878)에게 1829년에 보낸 편지에 쓴
내용이다.

42

종단원 도입

일상생활에서 사용하는 제품의 디자인에서 다양한 패턴을 찾을 수 있는데, 이러한 패턴은 도형의 이동을 활용하여 만들 수 있다.

이 단원에서는 도형의 평행이동과 대칭이동의 뜻을 이해하고, 평행이동 또는 대칭이동한 도형의 방정식을 구하는 방법에 대하여 학습한다.

좌표평면에서 도형의 평행이동과 대칭이동에 대한 개념의 이해는 선대칭도형, 점대칭도형, 평행이동에 대한 개념에서 자연스럽게 이어지도록 한다.

알렉산드르 푸시킨(Alexander Pushkin, A., 1799~1837)

러시아의 대표적인 시인이자 소설가로서 어린 시절 프랑스어를 배우고 러시아 민중의 삶을 이해했으며, 자유주의적 사상을 가지고 작품을 창작하여 러시아 국민 문학의 창시자로 불린다. 그의 작품은 러시아 국민의 감정과 사상을 대변하며, 현대 러시아 문학에도 큰 영향을 끼치고 있다. 푸시킨의 창작은 고전주의, 낭만주의, 사실주의를 포함한 다양한 예술 사조를 수용하면서 새로운 예술적 가능성을 열었다. 그의 생애는 국민적 애국주의와 러시아 민족의 자각을 반영한 역사적 시기와 겹치는데, 그는 그 시대의 사상과 감정을 훌륭히 표현하여 러시아 국민 문학의 아버지로도 불린다.

푸시킨은 불확실한 개인적 삶과 예술적 역량을 통해 근대 러시아 문학의 창시자로 남았으며, 그의 작품은 현대 러시아 문학에서도 지속적인 영향을 미치고 있다.

준비 학습

1

주안점 | 일차함수의 평행이동을 말할 수 있는지 확인한다.

풀이 | 일차함수 $y=x+2$ 의 그래프는 일차함수 $y=x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

답 2

2

주안점 | x 축에 대하여 대칭인 두 이차함수의 그래프를 찾을 수 있는지 확인한다.

풀이 | 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프는 $y=-ax^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이므로 그래프가 x 축에 대하여 대칭인 것은 ㄱ과 ㄷ, ㄴ과 ㄹ이다.

답 ㄱ과 ㄷ, ㄴ과 ㄹ

지도 목표

- ① 좌표평면에서 점의 평행이동의 뜻을 이해하고, 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
- ② 좌표평면에서 도형의 평행이동의 뜻을 이해하고, 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.
- ③ 도형의 방정식을 $f(x, y)=0$ 의 꼴로 나타낼 수 있게 한다.

지도상의 유의점

- ① 점, 직선, 원은 평행이동에 의하여 각각 점, 직선, 원이 됨을 이해하게 한다.
- ② 도형의 방정식을 $f(x, y)=0$ 으로 나타내는 것을 예를 통하여 이해하고 이를 활용할 수 있게 한다.
- ③ 점 $P(x, y)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(x+a, y+b)$ 가 되지만, 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 동일하게 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a, y-b)=0$ 이 됨을 이해하게 한다.
- ④ 도형의 평행이동을 실생활에 적용해 보는 활동을 통해 그 유용성을 인식하게 한다.
- ⑤ 좌표축의 평행이동은 다루지 않는다.

용어와 기호

• $f(x, y)=0$

성취수준

- A 도형의 평행이동을 탐구하고 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있으며, 실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다.
- B 도형의 평행이동을 이해하고 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있으며, 실생활과 연결할 수 있다.
- C 도형의 평행이동을 알고 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.
- D 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.
- E 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.

01

평행이동

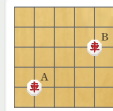
학습 목표 평행이동을 탐구하고, 실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다.

케이블카, 사다리차, 에스컬레이터 등은 사람이나 물건을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 이동하는 장치로, 우리 주변에서 평행이동을 관찰할 수 있는 좋은 예이다.

점의 평행이동

오전 놀이 장기에서 차(車)는 한 수를 둘 때, 선을 따라 한 방향으로 원하는 만큼 움직일 수 있다.

▶ 오른쪽 그림에서 차를 A에서 B로 두 수 만에 옮기려면 어떻게 움직여야 하는지 말해 보자.



배경지식
한 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 이동하는 것을 평행이동이라고 한다.

좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표를 구해 보자.

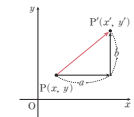
점 $P(x, y)$ 를 평행이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하면

$$x' = x + a, \quad y' = y + b$$

이다. 따라서 점 P' 의 좌표는

$$(x + a, y + b)$$

이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

점의 평행이동

점 (x, y) 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(x + a, y + b)$

예제 1 점 $(2, 1)$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(2+1, 1+(-2))$, 즉 $(3, -1)$

44

점의 평행이동

내용 연구

- ① 점 $P(x, y)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하여 점 $P'(x+a, y+b)$ 로 옮기는 변환을

$$(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$$

와 같이 나타낼 수 있다.

이때 평행이동을 변환으로서 강조하지 않도록 한다.

생각 열기

주안점 장기판을 좌표평면으로 생각하고, 가로 방향과 세로 방향으로 이동해 봄으로써 x 축, y 축의 방향으로의 평행이동을 이해하게 한다.

풀이 오른쪽으로 3칸, 위쪽으로 2칸(또는 위쪽으로 2칸, 오른쪽으로 3칸) 움직여야 한다.

풀이 참조

❗ **문제 1** 다음 점을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) $(-4, 3)$

(2) $(5, -1)$

도형의 평행이동

- ❷ 직선의 방정식 $y=4x-3$ 과 원의 방정식 $x^2+y^2=9$ 는 각각 $4x-y-3=0$ 과 $x^2+y^2-9=0$ 으로 나타낼 수 있다. 이와 같이 좌표평면 위에서 도형의 방정식은 $f(x, y)=0$ 의 꼴로 나타낼 수 있다.

Ⓢ $f(x, y)=0$ 은 x 와 y 에 대한 방정식을 나타낸다.

방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형 F 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 도형 F' 의 방정식을 구해 보자.

- ❸ 오른쪽 그림과 같이 도형 F 위의 점 $P(x, y)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하면

$$x'=x+a, y'=y+b$$

이므로

$$x=x'-a, y=y'-b$$

이다. 이것을 $f(x, y)=0$ 에 대입하면

$$f(x'-a, y'-b)=0$$

이므로 점 $P'(x', y')$ 은 방정식 $f(x-a, y-b)=0$ 이 나타내는 도형 위의 점이 된다.

따라서 구하는 도형 F' 의 방정식은

$$f(x-a, y-b)=0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

도형의 평행이동

- Ⓢ $f(x-a, y-b)=0$ 은 $f(x, y)=0$ 에서 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$ 를 대입한 것과 같다.
- ❹ 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 도형의 방정식은
- ❺ $f(x-a, y-b)=0$

45

문제 1

❗ **주안점** 좌표평면에서 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

❗ **풀이** (1) 점 $(-4, 3)$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-4-3, 3+2)$$

즉, $(-7, 5)$

(2) 점 $(5, -1)$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(5-3, -1+2)$$

즉, $(2, 1)$

답 (1) $(-7, 5)$ (2) $(2, 1)$

도형의 평행이동

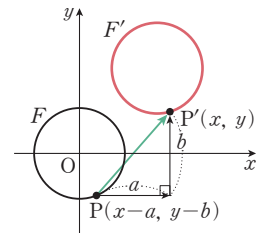
내용 연구

- ❷ 직선의 방정식과 원의 방정식을 $f(x, y)=0$ 의 꼴로 나타낼 수 있음을 이해하게 한다.

- ❸ 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형 F 위의 점 $P(x, y)$ 를 평행이동한 점을 $P(x', y')$ 이라 할 때, x 와 x' , y 와 y' 의 관계를 이용하여 평행이동한 도형 F' 의 방정식을 구하는 방법을 유도할 수 있게 한다.

❗ **오개념 바로잡기** 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 점의 평행이동과 혼동하여 $f(x+a, y+b)=0$ 으로 잘못 생각하지 않도록 주의하게 한다.

- ❹ 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형 F 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 도형 F' 의 방정식을 다음과 같이 구할 수도 있다.



도형 F' 위의 임의의 점 $P'(x, y)$ 는 도형 F 위의 점 $P(x-a, y-b)$

가 이동한 것이다.

그런데 점 P 는 도형 F 위의 점이므로

$$f(x-a, y-b)=0$$

이 성립한다.

따라서 $f(x-a, y-b)=0$ 은 도형 F' 의 방정식이다.

- ❺ 평행이동에 의하여 도형의 방정식은 변형되지만 도형의 모양은 유지됨을 이해하게 한다.

지도 자료

평행이동과 벡터

평행이동은 임의의 한 점 P 와 점 P 가 평행이동에 의하여 옮겨지는 점 P' 을 부여함으로써 결정된다.

즉, 평행이동은 임의의 점 P 에서 점 P' 쪽으로 향하는 유향성분, 즉 벡터 $\overrightarrow{PP'}$ 으로 나타낼 수 있다.

좌표평면에서 임의의 점 $P(x, y)$ 가 한 평행이동에 의하여 점 $P'(x', y')$ 으로 옮겨졌다고 하면 두 점 P 와 P' 의 좌표 사이에는

$$x'=x+a, y'=y+b \quad (a, b \text{는 상수})$$

의 관계가 있다.

I 문제 2

|주안점 좌표평면에서 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이 1 (1) $x-4y-1=0$ 에서 x 대신 $x+2$, y 대신 $y-4$ 를 대입하면

$$(x+2)-4(y-4)-1=0$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$x-4y+17=0$$

(2) $(x+1)^2+(y-5)^2=9$ 에서 x 대신 $x+2$, y 대신 $y-4$ 를 대입하면

$$\{(x+2)+1\}^2+\{(y-4)-5\}^2=9$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-9)^2=9$$

|풀이 2 (2) 원의 중심 $(-1, 5)$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동하면 $(-3, 9)$ 이고, 반지름의 길이는 3 으로 변함이 없으므로 구하는 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-9)^2=9$$

$$\text{답 } (1) x-4y+17=0 \quad (2) (x+3)^2+(y-9)^2=9$$

I 문제 3

|주안점 좌표평면에서 평행이동한 도형의 방정식을 구하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이 $(x-6)^2+(y-4)^2=2$ 에서 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$ 를 대입하면

$$(x-a-6)^2+(y-b-4)^2=2$$

원 $x^2+y^2-2x-4y+3=0$ 은 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=2$ 로 나타낼 수 있으므로

$$-a-6=-1, \quad -b-4=-2$$

따라서 $a=-5, b=-2$

$$\text{답 } a=-5, b=-2$$

생각 넓히기

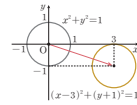
|주안점 평행이동을 이용하여 중심이 원점이 아닌 원의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이 ① 점 $A(-5, 1)$ 을 x 축의 방향으로 6 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 점 A' 의 좌표는 $(1, 2)$

예제 1 원 $x^2+y^2=1$ 을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 원의 방정식을 구하시오.

① 원의 중심 $(0, 0)$ 이 점 $(3, -1)$ 로 평행이동한 것으로 생각해 구할 수도 있다.

|풀이 $x^2+y^2=1$ 에서 x 대신 $x-3$, y 대신 $y-(-1)$ 을 대입하면
 $(x-3)^2+\{y-(-1)\}^2=1$
 따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x-3)^2+(y+1)^2=1$

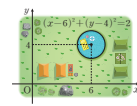


I 문제 2 다음 방정식이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

$$(1) x-4y-1=0$$

$$(2) (x+1)^2+(y-5)^2=9$$

|실생활 + I 문제 3 오른쪽 그림은 어느 캠핑장을 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 이동식 수영장을 원 $(x-6)^2+(y-4)^2=2$ 로 나타낼 때, 이 수영장을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하였더니 원 $x^2+y^2-2x-4y+3=0$ 으로 나타내어졌다. 이때 상수 a 와 b 의 값을 구하시오.

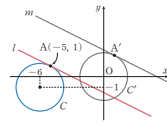


원 $C: (x+6)^2+(y+1)^2=5$ 위의 점 $A(-5, 1)$ 에서의 접선 l 의 방정식을 구하려고 한다.

활동 ① 원 C 를 원 $C': x^2+y^2=5$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 A 를 평행이동한 점 A' 의 좌표를 구해 보자.

활동 ② 원 C' 위의 점 A' 에서의 접선 m 의 방정식을 구해 보자.

활동 ③ 접선 m 을 평행이동하여 접선 l 의 방정식을 구해 보자.



46

② 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $A'(1, 2)$ 에서의 접선 m 의 방정식은

$$x+2y=5$$

③ 접선 m 을 x 축의 방향으로 -6 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 접선 l 의 방정식은

$$x+2y=-3$$

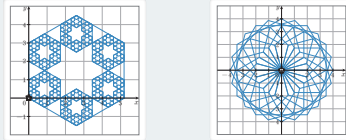
$$\text{답 } ① (1, 2) \quad ② x+2y=5 \quad ③ x+2y=-3$$

지도 자료

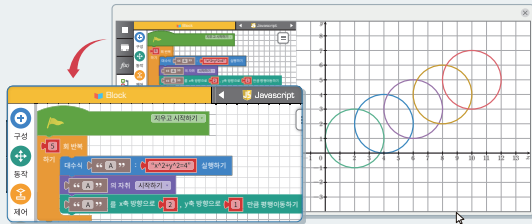
평행의 어원

‘평행’은 한자로 平行으로 쓰는데, 여기서 平은 ‘곧다’, 行은 ‘나아가다’라는 뜻을 지니므로 평행은 ‘곧게 나아가다’라는 뜻을 가진다. 즉, 한 평면 위에서 두 직선이 만나지 않을 때, 이 두 직선은 서로 평행하고 이 두 직선은 곧게 나아가간다고 할 수 있다. 평행은 영어로는 parallel이라고 쓰는데, 이 단어는 그리스어 para와 allonon을 합쳐 만든 단어로 알려져 있다. para는 ‘~에 나란히’, allonon에는 ‘다른 하나’라는 뜻이 있으므로 parallel에는 ‘다른 하나와 나란히’라는 뜻이 있다.

'알지오매스'의 블록 코딩 기능과 도형의 이동을 이용하면 다음과 같이 여러 가지 재미있는 패턴을 그릴 수 있다.



다음은 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 것을 5회 반복하여 그린 것이다.

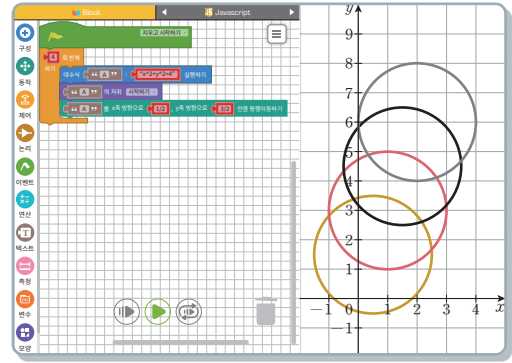


확인 1 위의 코딩의 결과로 나타나는 다섯째 원의 방정식을 말해 보자.

2 위의 코딩의 둘째 줄을 [4] 회 반복하기로 수정하고 다섯째 줄을 [2]를 x 축 방향으로 [12], y 축 방향으로 [2]만큼 평행이동하기로 수정할 때, 그 결과로 나타나는 넷째 원의 방정식을 말해 보자.

알지오매스 이용하기

반복 횟수를 5회에서 4회로 수정하고 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동하는 것을 $\frac{1}{2}$ 만큼으로, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 것을 $\frac{3}{2}$ 만큼으로 수정하면 다음과 같이 실행된다.



예 1 $(x-10)^2 + (y-5)^2 = 4$
2 $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 4$

공학 도구 알지오매스의 코딩 기능을 이용하여 패턴 만들기

주안점 알지오매스의 블록 코딩 기능을 이용하여 도형을 반복적으로 평행이동하면 패턴을 만들어 낼 수 있음을 알게 하고, 스스로 패턴을 만들어 볼 수 있도록 지도한다.

풀이 1 원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 것을 5회 반복하였으므로 원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 x 축의 방향으로 10만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 다섯째 원의 방정식은

$$(x-10)^2 + (y-5)^2 = 4$$

2 원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로

$\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동하는 것을 4회 반복하였으므로 원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

따라서 넷째 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 4$$

[교과 활동 중 과목별 세부 능력 및 특기 사항] 적용 Tips

핵심아이디어	평면도형을 식으로 표현하는 것은 도형의 이동에 대한 탐구의 유용한 도구가 된다.
성취기준	평행이동을 탐구하고, 실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다.
과정·기능 가치·태도	- 수학적 절차를 수행하고 계산하기 - 적절한 전략을 사용하여 문제해결하기
기재예시	- 알지오매스의 블록 코딩 기능을 이용하여 원을 일정한 간격으로 평행이동시켜 패턴이 나타나는 무늬를 표현한 것을 확인함. - 교과서의 예시 코딩을 빠르게 분석하고 필요한 기능을 정확하게 파악하여 유사한 작품을 어렵지 않게 만든 것을 확인함. - 우수한 논리적 사고력을 가지고 있어 코딩을 하는 속도가 빠르고 논리적으로 모순없는 플로우 차트를 제작하였음. 특히, 평행이동에 대한 명확한 수학적 지식을 가지고 있어 코딩에도 그대로 적용할 수 있음을 확인함.

지도 목록

- ① 좌표평면에서 x 축, y 축, 원점 및 직선 $y=x$ 에 대한 점의 대칭이동의 뜻을 이해하고, 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
- ② 좌표평면에서 x 축, y 축, 원점 및 직선 $y=x$ 에 대한 도형의 대칭이동의 뜻을 이해하고, 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

- ① 대칭이동한 도형의 방정식에 대한 특징을 알아보고, 원래 도형의 방정식과 비교하여 방정식이 바뀌는 규칙을 이해하게 한다.
- ② 원점에 대한 대칭이동과 직선에 대한 대칭이동을 혼동하지 않도록 주의하게 한다.
- ③ 대칭이동은 x 축, y 축, 원점 및 직선 $y=x$ 에 대한 대칭이동에 대해서만 지도한다.
- ④ 도형의 대칭이동을 실생활에 적용해 보는 활동을 통해 그 유용성을 인식하게 한다.

용어와 기호

- 대칭이동(對稱移動, symmetric transformation)

성취수준

- 원점, x 축, y 축, 직선 $y=x$ 에 대한 대칭이동을 탐구하고 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있으며, 실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다.
- 원점, x 축, y 축, 직선 $y=x$ 에 대한 대칭이동을 이해하고 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있으며, 실생활과 연결할 수 있다.
- 원점, x 축, y 축, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.
- 원점, x 축, y 축, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.
- x 축, y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.

점의 대칭이동

내용 연구

- ① 점 P 를 x 축(또는 y 축)에 대하여 대칭이동한 점을 P' 이라 하면 x 축(또는 y 축)은 선분 PP' 을 수직이등분한다.

02

대칭이동

학습 목표 원점, x 축, y 축, 직선 $y=x$ 에 대한 대칭이동을 탐구하고, 실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다.

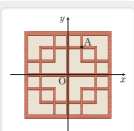
하늘을 찌를 듯이 솟은 아주 높은 고층 건물을 '만자창' (萬字樓)이라고 하는데, 외관상의 아름다움과 구조적인 안정성을 갖추기 위해 대부분 좌우 대칭의 형태로 세운다. 이와 같이 우리 주변에서 도형의 대칭이동의 원리를 이용한 사례를 쉽게 찾아볼 수 있다.

점의 대칭이동

오른쪽 그림은 "만자창"을 대칭축이 각각 x 축과 y 축이 되도록 좌표평면 위에 그린 것이다.

- ① 점 A 와 x 축에 대하여 대칭인 점을 B , y 축에 대하여 대칭인 점을 C , 원점에 대하여 대칭인 점을 D 라 할 때, 세 점 B, C, D 를 오른쪽 그림에 나타내 보자.

- ② 점 A 의 좌표가 $(1, 2)$ 일 때, 세 점 B, C, D 의 좌표를 말해 보자.



* 만자창은 창살을 만(卍)자 모양으로 만든 형이다.

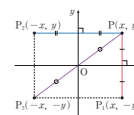
어떤 도형을 주어진 직선 또는 점에 대하여 대칭인 도형으로 옮기는 것을 **대칭이동**이라고 한다.

좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 를 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 점 $P(x, y)$ 를

- ① x 축에 대하여 대칭이동한 점 P_1 의 좌표는 $(x, -y)$,
 y 축에 대하여 대칭이동한 점 P_2 의 좌표는 $(-x, y)$,
- ② 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_3 의 좌표는 $(-x, -y)$

이다.



- ② 점 $P(x, y)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하면 선분 PP' 의 중점은 원점이므로 $\frac{x+x'}{2}=0, \frac{y+y'}{2}=0$ 에서 $x'=-x, y'=-y$ 이다.

따라서 점 P' 의 좌표는 $(-x, -y)$ 이다.

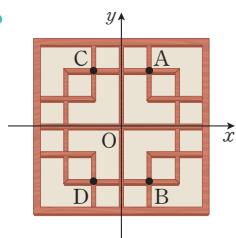
- ③ 점 P 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 P' 이라 하면 다음이 성립한다.

- ① 선분 PP' 의 중점은 직선 $y=x$ 위에 있다.
- ② 직선 PP' 은 직선 $y=x$ 에 수직이다.

생각 열기

|주안점| 좌표평면에 나타난 만자창을 이용하여 x 축, y 축, 원점에 대한 점의 대칭이동을 알게 한다.

답 ①



- 3 한편, 점 $P(x, y)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하면 선분 PP' 의 중점 $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$ 이 직선 $y=x$ 위의 점이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{x+x'}{2} = \frac{y+y'}{2},$$

$$x' - y' = -x + y \quad \cdots \cdots ①$$

또, 직선 PP' 이 직선 $y=x$ 에 수직이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{y'-y}{x'-x} = -1,$$

$$x' + y' = x + y \quad \cdots \cdots ②$$

①과 ②를 연립하여 풀면 $x'=y$ 이고 $y'=x$ 이다.

따라서 점 $P(x, y)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 P' 의 좌표는 (y, x) 이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

점의 대칭이동

점 (x, y) 를

- ① x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(x, -y)$
- ② y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, y)$
- ③ 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, -y)$
- ④ 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (y, x)

30기 점 $(4, 1)$ 을

- ① x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4, -1)$
- ② y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-4, 1)$
- ③ 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-4, -1)$
- ④ 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(1, 4)$

문제 1 점 $(3, -5)$ 를 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

- (1) x 축 (2) y 축
- (3) 원점 (4) 직선 $y=x$

49

문제 1

주안점 좌표평면에서 x 축, y 축, 원점, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이 점 $(3, -5)$ 를

- (1) x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(3, 5)$
- (2) y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3, -5)$
- (3) 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3, 5)$
- (4) 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-5, 3)$

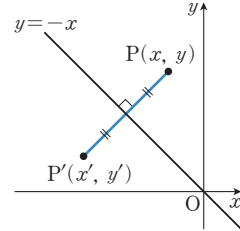
- 정답 (1) $(3, 5)$ (2) $(-3, -5)$
(3) $(-3, 5)$ (4) $(-5, 3)$

지도 자료

대칭이동

- (1) 직선 $y=-x$ 에 대한 점의 대칭이동

좌표평면에서 점 $P(x, y)$ 를 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면 다음과 같다.



점 $P(x, y)$ 를 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하면 선분 PP' 의 중점

$$(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$$

은 직선 $y=-x$ 위의 점이므로

$$\frac{y+y'}{2} = -\frac{x+x'}{2}$$

$$y+y' = -(x+x') \quad \cdots \cdots ①$$

또, 직선 PP' 은 직선 $y=-x$ 에 수직이므로

$$-1 \times \frac{y'-y}{x'-x} = -1$$

$$y'-y = x'-x \quad \cdots \cdots ②$$

①과 ②를 연립하여 풀면

$$x' = -y, \quad y' = -x$$

따라서 점 $P(x, y)$ 를 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 점 P' 의 좌표는 $(-y, -x)$ 이다.

- (2) 점 (a, b) 에 대한 대칭이동

(i) 점 $P(x, y)$ 를 점 (a, b) 에 대하여 대칭이동한 점을

$P'(x', y')$ 이라 하면 대칭의 중심은 선분 PP' 의 중점이므로

$$a = \frac{x+x'}{2}, \quad b = \frac{y+y'}{2}$$

$$\text{에서 } x' = 2a - x, \quad y' = 2b - y$$

따라서 점 P' 의 좌표는 $(2a-x, 2b-y)$ 이다.

(ii) 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 점 (a, b) 에 대하여 대칭이동하였다면 (i)의 관계식으로부터

$$x = 2a - x', \quad y = 2b - y'$$

을 얻고, 이것을 방정식 $f(x, y)=0$ 에 대입하면

$$f(2a-x', 2b-y')=0$$

을 얻는다.

따라서 점 (a, b) 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(2a-x, 2b-y)=0$ 이다.

I 내용 연구

- 도형 F 를 대칭이동한 도형을 F' 이라 할 때, 도형 F' 은 도형 F 위의 각 점을 대칭이동한 점들로 이루어진 도형임을 알게 한다.
- 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형 F 위의 점 $P(x, y)$ 를 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 할 때, x 와 x' , y 와 y' 의 관계를 이용하여 대칭이동한 도형 F' 의 방정식을 구하는 방법을 유도할 수 있게 한다.
- 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형 F 를 y 축에 대하여 대칭이동한 도형 F' 의 방정식은 다음과 같이 얻는다. 도형 F 위의 점 $P(x, y)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하면

$$x' = -x, y' = y$$

이므로

$$x = -x', y = y'$$

이다. 이것을 $f(x, y)=0$ 에 대입하면

$$f(-x', y') = 0$$

즉, 점 $P'(x', y')$ 은 방정식 $f(-x, y)=0$ 이 나타내는 도형 위의 점이 된다.

따라서 도형 F' 의 방정식은

$$f(-x, y) = 0$$

이다.

- 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형 F 를 원점에 대하여 대칭이동한 도형 F' 의 방정식은 다음과 같이 얻는다. 도형 F 위의 점 $P(x, y)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하면

$$x' = -x, y' = -y$$

이므로

$$x = -x', y = -y'$$

이다. 이것을 $f(x, y)=0$ 에 대입하면

$$f(-x', -y') = 0$$

즉, 점 $P'(x', y')$ 은 방정식 $f(-x, -y)=0$ 이 나타내는 도형 위의 점이 된다.

따라서 도형 F' 의 방정식은

$$f(-x, -y) = 0$$

이다.

- 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형 F 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형 F' 의 방정식은 다음과 같이 얻는다.

도형 F 위의 점 $P(x, y)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭

도형의 대칭이동

- 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형 F 를 x 축에 대하여 대칭이동한 도형 F' 의 방정식을 구해 보자.



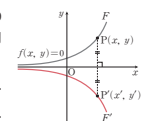
오른쪽 그림과 같이 방정식 $f(x, y)=0$

이 나타내는 도형 F 위의 점 $P(x, y)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하자.

점 P' 의 좌표를 x 와 y 를 이용하여 나타내 보자.

다음은 도형 F' 의 방정식을 구하는 과정이다.

□ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.



◆의 결과로부터 $x = \square$ $y = \square$

이것을 $f(x, y)=0$ 에 대입하면

$$f(x', \square) = 0$$

즉, 점 $P'(x', y')$ 은 방정식 $f(x, -y)=0$ 이 나타내는 도형 위의 점이 된다.

따라서 구하는 도형 F' 의 방정식은

$$f(x, -y) = 0$$

위의 결과와 같은 방법으로 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을

y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(-x, y) = 0,$$

원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(-x, -y) = 0,$$

직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x) = 0$$

임을 알 수 있다.

$$f(-x, y) = 0$$

$$f(x, y) = 0$$

$$P'(x', y')$$

$$P(x, y)$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하면

$$x' = y, y' = x$$

이므로

$$x = y', y = x'$$

이다. 이것을 $f(x, y)=0$ 에 대입하면

$$f(y', x') = 0$$

즉, 점 $P'(x', y')$ 은 방정식 $f(y, x)=0$ 이 나타내는 도형 위의 점이 된다.

따라서 도형 F' 의 방정식은

$$f(y, x) = 0$$

이다.

- 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축, y 축, 원점, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 각각 $f(x, -y)=0$, $f(-x, y)=0$, $f(-x, -y)=0$, $f(y, x)=0$ 이므로 다음과 같이 이해하게 한다.

(i) x 축에 대한 대칭이동: y 의 부호가 반대

(ii) y 축에 대한 대칭이동: x 의 부호가 반대

(iii) 원점에 대한 대칭이동: x, y 의 부호가 모두 반대

(iv) 직선 $y=x$ 에 대한 대칭이동: x 대신 y, y 대신 x 대입

직선 $y = -x$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

6

이상을 정리하면 다음과 같다.

도형의 대칭이동

방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을

- ① x 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, -y) = 0$
- ② y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, y) = 0$
- ③ 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, -y) = 0$
- ④ 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x) = 0$

예제 1 원 $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$ 를 다음에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

(1) x 축

(2) y 축

(3) 원점

풀이 (1) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$ 에서

(1) y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$(x-4)^2 + (-y+3)^2 = 4$$

$$\text{즉, } (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$$

(2) x 대신 $-x$ 을 대입하면

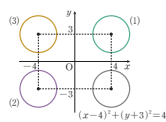
$$(-x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$$

$$\text{즉, } (x+4)^2 + (y+3)^2 = 4$$

(3) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$(-x-4)^2 + (-y+3)^2 = 4$$

$$\text{즉, } (x+4)^2 + (y-3)^2 = 4$$



풀이 참조

문제 2 다음 방정식이 나타내는 도형을 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) $2x - 3y - 1 = 0$

(2) $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$

문제 3 원 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 다음 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

51

함께하기

주안점 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형 F 를 x 축에 대하여 대칭이동한 도형 F' 의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이 ① 점 P' 의 좌표는 $(x, -y)$

② ①의 결과로부터 $x' = x, y' = -y$ 이므로

$$x = \boxed{x'}, y = \boxed{-y'}$$

이것을 $f(x, y) = 0$ 에 대입하면

$$f(x', \boxed{-y'}) = 0$$

즉, 점 $P'(x', y')$ 은 방정식 $f(x, -y) = 0$ 이 나타내는 도형 위의 점이 된다.

따라서 구하는 도형 F' 의 방정식은

$$f(x, -y) = 0$$

☞ ① $(x, -y)$ ② $x', -y', -y'$

생각톡톡 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 다음 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

생각톡톡 직선 $y = -x$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $y = -x$ 이다.

문제 2

주안점 좌표평면에서 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이 (1) $2x - 3y - 1 = 0$ 에서

(i) x 축: y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$2x - 3 \times (-y) - 1 = 0$$

$$\text{즉, } 2x + 3y - 1 = 0$$

(ii) y 축: x 대신 $-x$ 를 대입하면

$$2 \times (-x) - 3y - 1 = 0$$

$$\text{즉, } 2x + 3y + 1 = 0$$

(iii) 원점: x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$2 \times (-x) - 3 \times (-y) - 1 = 0$$

$$\text{즉, } 2x - 3y + 1 = 0$$

(2) $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$ 에서

(i) x 축: y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$x^2 + (-y)^2 - 4x + 10 \times (-y) - 7 = 0$$

$$\text{즉, } x^2 + y^2 - 4x - 10y - 7 = 0$$

(ii) y 축: x 대신 $-x$ 를 대입하면

$$(-x)^2 + y^2 - 4 \times (-x) + 10y - 7 = 0$$

$$\text{즉, } x^2 + y^2 + 4x + 10y - 7 = 0$$

(iii) 원점: x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$(-x)^2 + (-y)^2 - 4 \times (-x) + 10 \times (-y) - 7 = 0$$

$$\text{즉, } x^2 + y^2 + 4x - 10y - 7 = 0$$

☞ 풀이 참조

문제 3

주안점 좌표평면에서 원을 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이 원 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$$\{(x-2)-3\}^2 + \{(y-1)+2\}^2 = 5$$

$$\text{즉, } (x-5)^2 + (y+1)^2 = 5$$

원 $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 5$ 를 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$(x-5)^2 + \{(-y)+1\}^2 = 5$$

$$\text{즉, } (x-5)^2 + (y-1)^2 = 5$$

$$\text{☞ } (x-5)^2 + (y-1)^2 = 5$$

I 문제 4

|주안점| 좌표평면에서 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $2x+y+3=0$ 에서 x 대신 y , y 대신 x 를 대입하면

$$2y+x+3=0, \text{ 즉 } x+2y+3=0$$

(2) $x^2+y^2-6x+9y=0$ 에서 x 대신 y , y 대신 x 를 대입하면

$$y^2+x^2-6y+9x=0, \text{ 즉 } x^2+y^2+9x-6y=0$$

$$\text{답 (1) } x+2y+3=0 \quad (2) \quad x^2+y^2+9x-6y=0$$

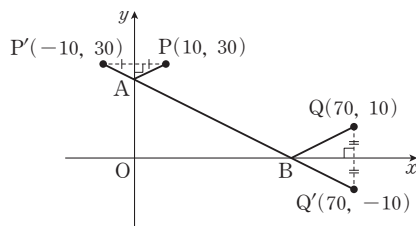
I 문제 5

|주안점| 좌표평면에서 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| 다음 그림과 같이 점 P를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 P', 점 Q를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q'이라 하면

$$P'(-10, 30), Q'(70, -10)$$

이고, 노란 공의 이동 거리는 선분 P'Q'의 길이와 같다.



이때 직선 P'Q'의 방정식은

$$y+10=\frac{30-(-10)}{-10-70}(x-70)$$

$$\text{즉, } y=-\frac{1}{2}x+25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x=0$ 을 ①에 대입하면

$$y=25$$

$y=0$ 을 ①에 대입하면

$$0=-\frac{1}{2}x+25, \quad x=50$$

따라서 A(0, 25), B(50, 0)이다.

$$\text{답 점 A의 좌표는 } (0, 25), \\ \text{점 B의 좌표는 } (50, 0)$$

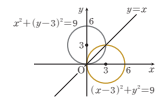
예제 2 원 $x^2+(y-3)^2=9$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

풀이 $x^2+(y-3)^2=9$ 에서 x 대신 y , y 대신 x 를 대입하면

$$y^2+(x-3)^2=9$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+y^2=9 \quad \dots\dots \text{답}$$

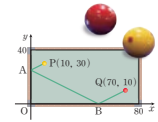


I 문제 4 다음 방정식이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

$$(1) 2x+y+3=0$$

$$(2) x^2+y^2-6x+9y=0$$

스프츠 I 문제 5 오른쪽 그림은 가로 길이가 80, 세로 길이가 40인 직사각형 모양의 당구대를 두 번 좌표축에 놓아 도록 그린 것이다. 점 P(10, 30)의 위치에 놓인 노란 공을 쳐서 y 축과 x 축에 차례대로 부딪히게 하여 점 Q(70, 10)의 위치에 놓인 빨간 공을 맞히려고 할 때, 두 점 A와 B의 좌표를 구하시오. (단, 공이 당구대의 변에 부딪힐 때의 입사각과 반사각의 크기는 같고, 공의 크기는 생각하지 않는다.)



읽는 방향이나 보는 관점에 따라 모양이 변하거나 다르게 읽히는 글자 디자인을 '엠비그램(ambigram)'이라고 한다. 다음은 대칭이동을 이용하여 디자인한 'love song'과 'perfect'의 엠비그램이다. 이처럼 대칭이동을 이용하여 나만의 엠비그램을 만들어 보자.



52

생각 넓히기

|주안점| 대칭이동을 이용하여 창의적인 엠비그램을 만들어 볼 수 있게 한다.

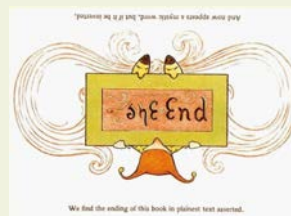
|풀이| 예시 'puzzle'의 엠비그램은 다음과 같이 만들 수 있다.

PUZZLE

읽기 자료

엠비그램(ambigram)

읽는 방향이나 보는 관점에 따라 글자의 모양이 변하거나 그대로 유지되는 글자 디자인을 '엠비그램'이라고 한다.



수학 이야기

전통 문양 속에 숨어 있는 평행이동과 대칭이동을 찾아서!

• 평행이동, 대칭이동, 회전이동은 말기, 뒤집기, 돌리기와 같은 뜻이다.

띠 문양은 기준이 되는 기본 도형을 '평행이동, 대칭이동, 회전이동'을 결합하여 한쪽 방향으로 반복적으로 이어 가는 구조이다. 이와 같은 세 가지 도형의 이동의 특성을 이용하여 수학자들은 평면에서 그릴 수 있는 모든 띠 문양을 7가지로 분류할 수 있다는 사실을 알아냈다.

다음은 7가지 기본 도형과 띠 문양의 구조를 나뉘어 모양을 이용하여 나타낸 것이다.

규칙	기본 도형	띠 문양
평행이동		
미끄럼 대칭이동 → 평행이동		
좌우 대칭이동 → 평행이동		
상하 대칭이동 → 평행이동		
좌우 대칭이동 및 미끄럼 대칭이동 → 평행이동		
상하 대칭이동 및 좌우 대칭이동 → 평행이동		
회전이동 → 평행이동		

※ 미끄럼 대칭이동은 평행이동한 다음 대칭 이동하는 것을 말한다.

우리나라 전통 문양에서도 7가지 기본 도형에 따라 구성된 띠 문양을 모두 찾아볼 수 있다. 다음은 충청남도 공주시에 있는 통학사의 대웅전 처마에서 찾아볼 수 있는 평행이동과 대칭이동을 이용한 띠 문양이다.

(출처: 신현용 외, 『문양에 관한 수학적 접근』)



53

1893년 삽화 작가 피터 뉴엘이 자신의 책 『Topsy & turvy』의 마지막 페이지에 똑바로 보면 'The End'이지만 뒤집어 읽으면 'Puzzle'로 보이는 엠비그램을 남기면서 시작되었고, 이후 많은 사람들이 엠비그램을 만들었다. 대표적인 엠비그램 디자이너로는 존 랭던과 스타트 김 등이 있다.

수학 이야기 전통 문양 속에 숨어 있는 평행이동과 대칭이동을 찾아서!

전통 문양에서는 평행이동과 대칭이동을 활용한 다양한 수학적 무늬를 발견할 수 있다.

띠 문양이란 일정한 조각이 좌우로 반복되는 문양을 말하고, 이때 반복되는 도형을 '기본 도형'이라고 한다.

아무리 복잡하고 섬세한 띠 문양이라고 하더라도 기본 도형을 평행이동, 대칭이동, 회전이동하는 세 가지 도형의 이동의 특성을 기본으로 한 7가지의 규칙으로 설명할 수 있다.

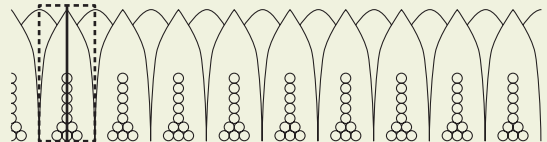
참고 한국문화정보원에서 운영하는 문화포털(www.culture.go.kr)에서 전통 문양을 활용한 다양한 디자인을 볼 수 있다.

읽기 자료

문화유산에서 찾을 수 있는 다양한 모양의 패턴



국보 청자 상감운학문 매병의 아랫부분의 문양을 평면에 나타내면 '좌우 대칭이동 → 평행이동'을 볼 수 있다.



국보 경주 구황동 금제여래좌상의 부처상 주위를 둘러싸고 있는 문양을 보면 '미끄럼 대칭이동 → 평행이동'을 볼 수 있다.



01

|주안점| 좌표평면에서 점의 평행이동을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 점 $(2, -1)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(2+a, -1+b)$$

따라서 $2+a=-5, -1+b=2$ 이므로

$$a=-7, b=3$$

$$\text{답 } a=-7, b=3$$

02

|주안점| 좌표평면에서 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| (1) $2x+3y-1=0$ 에서 x 대신 $x-6$, y 대신 $y+2$ 를 대입하면

$$2(x-6)+3(y+2)-1=0$$

$$\text{즉, } 2x+3y-7=0$$

(2) $x^2+(y-1)^2=9$ 에서 x 대신 $x-6$, y 대신 $y+2$ 를 대입하면

$$(x-6)^2+\{(y+2)-1\}^2=9$$

$$\text{즉, } (x-6)^2+(y+1)^2=9$$

$$\text{답 (1) } 2x+3y-7=0 \quad (2) (x-6)^2+(y+1)^2=9$$

03

|주안점| 좌표평면에서 x 축, y 축, 원점, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

|풀이| 점 $(-4, 3)$ 을

(1) x 축에 대하여 대칭이동하면 $(-4, -3)$

(2) y 축에 대하여 대칭이동하면 $(4, 3)$

(3) 원점에 대하여 대칭이동하면 $(4, -3)$

(4) 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 $(3, -4)$

$$\text{답 (1) } (-4, -3) \quad (2) (4, 3) \quad (3) (4, -3) \quad (4) (3, -4)$$

04

|주안점| 좌표평면에서 x 축, y 축, 원점, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $(x+5)^2+(y-4)^2=1$ 에서

(1) y 대신 $-y$ 를 대입하면

1-3 도형의 이동

중단원 마무리 문제

1. 평행이동

(1) 점의 평행이동
점 (x, y) 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(x+a, y+b)$

(2) 도형의 평행이동
방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a, y-b)=0$
 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$ 를 대입

2. 대칭이동

(1) 어떤 도형을 주어진 직선 또는 점에 대하여 대칭인 도형으로 옮기는 것을 대칭이동이라고 한다.

(2) 점의 대칭이동

점 (x, y) 를

① x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(x, -y)$ $\rightarrow$ y 좌표의 정호가 반대

② y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, y)$ $\rightarrow$ x 좌표의 정호가 반대

③ 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, -y)$ $\rightarrow$ x 좌표와 y 좌표의 정호가 모두 반대

④ 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (y, x) $\rightarrow$ x 좌표와 y 좌표를 서로 바꿈

(3) 도형의 대칭이동
방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을

① x 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, -y)=0$ $\rightarrow$ y 대신 $-y$ 를 대입

② y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, y)=0$ $\rightarrow$ x 대신 $-x$ 를 대입

③ 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, -y)=0$ $\rightarrow$ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입

④ 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$ $\rightarrow$ x 대신 y , y 대신 x 를 대입

이동

01 점 $(2, -1)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-5, 2)$ 일 때, 상수 a 와 b 의 값을 구하시오.

02 다음 방정식이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 6만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

$$(1) 2x+3y-1=0$$

$$(2) x^2+(y-1)^2=9$$

03 점 $(-4, 3)$ 을 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) x 축

(2) y 축

(3) 원점

(4) 직선 $y=x$

04 원 $(x+5)^2+(y-4)^2=1$ 을 다음에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

(1) x 축

(2) y 축

(3) 원점

(4) 직선 $y=x$

$$(x+5)^2+(-y-4)^2=1$$

$$\text{즉, } (x+5)^2+(y+4)^2=1$$

(2) x 대신 $-x$ 를 대입하면

$$(-x+5)^2+(y-4)^2=1$$

$$\text{즉, } (x-5)^2+(y-4)^2=1$$

(3) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$(-x+5)^2+(-y-4)^2=1$$

$$\text{즉, } (x-5)^2+(y+4)^2=1$$

(4) x 대신 y , y 대신 x 를 대입하면

$$(y+5)^2+(x-4)^2=1$$

$$\text{즉, } (x-4)^2+(y+5)^2=1$$

$$\text{답 (1) } (x+5)^2+(y+4)^2=1$$

$$(2) (x-5)^2+(y-4)^2=1$$

$$(3) (x-5)^2+(y+4)^2=1$$

$$(4) (x-4)^2+(y+5)^2=1$$

05

|주안점| 주어진 조건을 만족시키는 평행이동에 의해 옮겨지는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

표준

05 점 $(4, -5)$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점이 직선 $x-ay+3=0$ 위에 있을 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

06 원 $(x-1)^2+(y-6)^2=9$ 을 x 축의 방향으로 5 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 다음 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

07 직선 $y=2x-3$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선과 점 $(-2, 3)$ 을 지나는 직선 l 이 서로 수직일 때, 직선 l 의 방정식을 구하시오.

심화

08 점 $A(2, 1)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B , 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 C 라 할 때, 세 점 A, B, C 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

▶ 정답 및 풀이 144쪽

09 직선 $x+3y-4=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선을 l 이라 할 때, 원 $(x-1)^2+y^2=4$ 와 직선 l 의 교점의 개수를 구하시오.

심화

시뮬레이션

10 포물선 $y=x^2-4x$ 를 포물선 $y=x^2-12x+27$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $l: 2x+y-1=0$ 이 직선 l' 으로 옮겨진다. 이때 두 직선 l 과 l' 사이의 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

11 원 $x^2+y^2+8x-10y+28=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원이 직선 $y=mx$ 에 접하도록 하는 모든 실수 m 의 값의 합을 구하시오.

55

|풀이| 점 $(4, -5)$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(4-2, -5+4), \text{ 즉 } (2, -1)$$

점 $(2, -1)$ 이 직선 $x-ay+3=0$ 위에 있으므로

$$2-a \times (-1)+3=0$$

따라서 $a=-5$

답 -5

06

|주안점| 좌표평면에서 평행이동한 후 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 원 $(x-1)^2+(y-6)^2=9$ 을 x 축의 방향으로 5 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하기 위해 x 대신 $x-5$, y 대신 $y+1$ 을 대입하면

$$\{(x-5)-1\}^2+\{(y+1)-6\}^2=9$$

$$\text{즉, } (x-6)^2+(y-5)^2=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원 ①을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하기 위해 x 대신 y , y 대신 x 를 대입하면

$$(y-6)^2+(x-5)^2=9$$

$$\text{즉, } (x-5)^2+(y-6)^2=9$$

$$\text{답 } (x-5)^2+(y-6)^2=9$$

07

|주안점| 좌표평면에서 대칭이동한 직선과 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 직선 $y=2x-3$ 에서 y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$-y=2x-3, \text{ 즉 } y=-2x+3$$

이때 직선 l 은 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 점 $(-2, 3)$ 을 지나므로

$$y-3=\frac{1}{2}(x+2)$$

따라서 직선 l 의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x+4$$

$$\text{답 } y=\frac{1}{2}x+4$$

08

|주안점| 좌표평면에서 대칭이동에 의해 옮겨진 점으로 만든 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

|해결 과정| 점 $A(2, 1)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 B 의 좌표는

$$(-2, -1),$$

직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 C 의 좌표는

$$(1, 2)$$

▶ 30%

선분 AB 의 길이는

$$\sqrt{(-2-2)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{5}$$

이때 직선 AB 의 방정식은

$$y-1=\frac{-1-1}{-2-2}(x-2), \quad x-2y=0$$

이므로 점 $C(1, 2)$ 와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|1 \times 1 - 2 \times 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

▶ 50%

|답 구하기| 따라서 삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 3$$

▶ 20%

09

|주안점| 직선 $y=x$ 에 대한 직선의 대칭이동, 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 교점의 개수를 구할 수 있게 한다.

|풀이| 직선 l 의 방정식은

$$3x + y - 4 = 0$$

원 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 의 중심 $(1, 0)$ 과 직선 l 사이의 거리를 원의 반지름의 길이 2와 비교하면

$$\frac{|3 \times 1 + 0 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10} < 2$$

따라서 직선 l 과 원 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 는 서로 다른 두 점에서 만나므로 교점의 개수는 2이다.

답 2

10

|주안점| 처음의 직선과 주어진 조건을 만족시키는 평행이동에 의해 옮겨진 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

|해결 과정| 포물선 $y = x^2 - 4x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y - b = (x - a)^2 - 4(x - a)$$

$$\text{이므로 } y = x^2 - (2a + 4)x + a^2 + 4a + b$$

이 포물선이 포물선 $y = x^2 - 12x + 27$ 과 일치하므로

$$2a + 4 = 12, \quad a^2 + 4a + b = 27$$

$$\text{즉, } a = 4, \quad b = -5 \quad \blacktriangleright 30\%$$

직선 $l: 2x + y - 1 = 0$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동하면

$$2(x - 4) + (y + 5) - 1 = 0$$

$$\text{이므로 } l': 2x + y - 4 = 0 \quad \blacktriangleright 40\%$$

|답 구하기| 두 직선 l 과 l' 사이의 거리는 직선 l 위의 점 $(0, 1)$ 과 직선 l' 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 \times 0 + 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \quad \blacktriangleright 30\%$$

11

|주안점| x 축에 대하여 대칭이동한 원에 접하는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 원 $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 28 = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$x^2 + (-y)^2 + 8x - 10(-y) + 28 = 0$$

$$\text{이므로 } x^2 + y^2 + 8x + 10y + 28 = 0$$

$y = mx$ 를 위의 식에 대입하여 정리하면

$$(m^2 + 1)x^2 + (10m + 8)x + 28 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} D &= (10m + 8)^2 - 4 \times (m^2 + 1) \times 28 \\ &= -12m^2 + 160m - 48 = 0 \end{aligned}$$

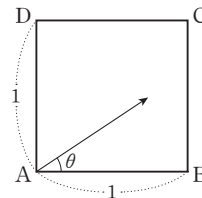
즉, $3m^2 - 40m + 12 = 0$ 이므로 근과 계수의 관계로부터

$$\text{모든 } m \text{의 값의 합은 } \frac{40}{3}$$

$$\text{답 } \frac{40}{3}$$

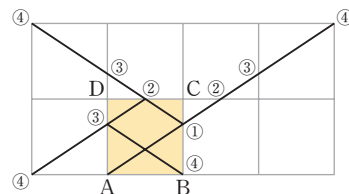
지도 자료

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 평면 거울이 있다.



꼭짓점 A에서 $\tan \theta = \frac{2}{3}$ 가 되도록 출발한 빛은 네 변에서 반사된 후, 네 꼭짓점 중에서 어느 꼭짓점에 도달하게 되는가? 또, 이때 빛이 진행한 경로의 길이를 구하시오.

|풀이| 다음 그림과 같이 정사각형 ABCD와 합동인 정사각형을 배열한 후, 처음에 빛이 진행한 경로를 직선으로 연장하여 세 직선 BC, CD, DA에 차례로 대칭이 되도록 그린다.



이와 같이 생각하면 빛은 세 변 BC, CD, DA 위의 ①, ②, ③ 지점에서 차례로 반사되어 꼭짓점 B에 도달하게 된다.

이때 빛이 진행한 경로의 길이는 직각을 낀 두 변의 길이가 3, 2인 직각삼각형의 빗변의 길이와 같다.

따라서 빛이 진행한 경로의 길이는

$$\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

반복의 예술, 평면 채우기를 해 볼까?

활동 목표 ▶ 평행이동과 대칭이동을 이용하여 평면 채우기를 할 수 있다.

오른쪽 그림은 네덜란드의 판화가 에스허르(Escher, M. C., 1898~1972)의 작품으로, 말을 탄 사람 모양의 동일한 도형이 평행이동과 대칭이동에 의하여 교묘하게 맞물려서 평면을 채운 것이다. 이처럼 일정한 형태의 조각으로 평면을 빈틈없이 채우는 것을 '평면 채우기'라 하고, 반복되는 가장 작은 단위를 '유닛(unit)'이라고 한다. 가장 기본이 되는 평면 채우기는 한 가지 정다각형을 사용하는 것인데 다음과 같이 3가지가 있다.



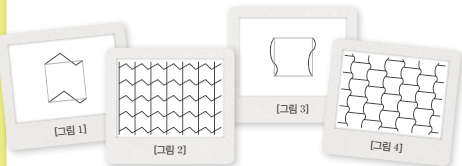
※ '말 타는 사람'

평면 채우기와 유닛



평행이동과 대칭이동을 이용하여 유닛의 모양을 변형하면 재미있는 평면 채우기를 할 수 있다. 예를 들어 정사각형을 변형한 [그림 1]의 유닛을 사용하여 [그림 2]의 평면 채우기를 할 수 있고, [그림 3]의 유닛을 사용하여 [그림 4]의 평면 채우기를 할 수 있다.

※ [그림 3]의 유닛은 왼쪽 변의 꼭짓을 오른쪽 변으로 평행이동하면 다음 위치에서 대칭이동한 것이다.



활동 ▶ 모둠별로 평행이동과 대칭이동을 이용한 유닛을 만들어 평면 채우기를 하고, 그 과정을 정리하여 발표해 보자.

프로젝트 평가

- 도형의 이동의 원리를 바르게 적용하였는가?
- 프로젝트 해결 과정을 논리적으로 설명하였는가?
- 프로젝트에 적극적으로 참여하고 다른 학생의 의견을 경청하였는가?

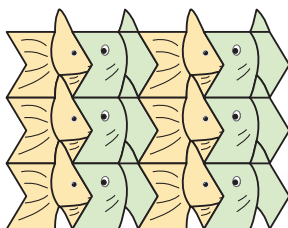
56

반복의 예술, 평면 채우기를 해 볼까?

|주안점| 평행이동과 대칭이동을 이용하여 유닛을 만들게 하여 창의적인 평면 채우기를 할 수 있게 한다.

|풀이| **[예시]** 유닛  을 사용하여 다음과 같은

평면 채우기를 할 수 있다.



[풀이] 풀이 참조

에스허르

테셀레이션(Tessellation)은 한 가지 이상의 도형을 이용하여 빈틈이나 포개짐 없이 평면이나 공간을 완벽하게 덮는 것을 말한다. 테셀레이션의 어원은 라틴어 'tessella'에서 유래하였는데, 고대 로마 모자이크에 사용되었던 작은 정사각형 모양의 돌 또는 타일을 뜻한다.

테셀레이션은 네덜란드 화가인 에스허르(Escher, M. C., 1898~1972)에 의하여 미술의 한 장르로 정착하였다. 풍경화를 주로 그리던 에스허르는 1936년 지중해 연안을 따라 여행하던 중 스페인 그라나다에 있는 알람브라 궁전을 방문하였다. 그곳에서 그는 계속해서 반복되는 형상들이 평면을 규칙적으로 분할하는 무어인의 장식 미술에 크게 감동을 받아 기하적 원리와 수학적 개념을 토대로 2차원의 평면 위에 3차원 공간을 표현한 작품을 그리기 시작하였다. 에스허르의 대표작으로는 교과서 56쪽의 「말타는 사람」 외에도 「도마뱀」(1943), 「폭포」(1961), 「뢰비우스의 띠 II」(1963) 등이 있다.

[교과 활동 중 과목별 세부 능력 및 특기 사항] 적용 Tips

핵심아이디어	평면도형을 식으로 표현하는 것은 도형의 이동에 대한 탐구의 유용한 도구가 된다.
성취기준	• 평행이동을 탐구하고, 실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다. • 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동을 탐구하고, 실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다.
과정·기능 가치·태도	• 수학적 절차를 수행하고 계산하기 • 도형의 방정식의 개념, 원리, 법칙 탐구하기 • 적절한 전략을 사용하여 문제해결하기 • 실생활과의 연결을 통한 도형의 방정식의 유용성 인식하기
기재예시	• 평행이동과 대칭이동을 적용하여 평면 채우기를 위한 유닛을 제작하고, 모둠원과 협력하여 평면 채우기 작품을 완성함. • 정사각형을 대칭이동과 평행이동으로 변형하여 물고기 모양의 유닛을 만들고, 이 유닛을 이어붙여 물고기 비늘 모양으로 평면 채우기를 완성함. • 모둠을 대표하여 제작 과정에 대해 설명하였으며, 이 과정에서 평행이동과 대칭이동을 적용한 방법에 대해 정확하게 설명한 점이 인상적임. • 채색 과정에서 창의적인 아이디어를 제시하여 모둠원들이 이에 대한 칭찬을 동료평가서에 공통적으로 작성함.

01

|주안점| 주어진 내분점의 좌표를 이용하여 점 B의 좌표를 구할 수 있게 한다.

|풀이| (i) 선분 AB를 4:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{4 \times a + 1 \times (-1)}{4+1}, \frac{4 \times b + 1 \times 4}{4+1} \right) \text{에서}$$

$$\left(\frac{4a-1}{5}, \frac{4b+4}{5} \right)$$

이 점이 x 축 위에 있으므로 y 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{4b+4}{5}=0 \text{이므로 } b=-1$$

(ii) 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times a + 3 \times (-1)}{1+3}, \frac{1 \times b + 3 \times 4}{1+3} \right) \text{에서}$$

$$\left(\frac{a-3}{4}, \frac{b+12}{4} \right)$$

이 점이 y 축 위에 있으므로 x 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{a-3}{4}=0 \text{이므로 } a=3$$

(i)과 (ii)에 의하여

$$a+b=3+(-1)=2$$

답 ④

02

|주안점| 한 점을 지나고 다른 직선과 평행한 직선의 방정식을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 직선 $3x-y-8=0$, 즉 $y=3x-8$ 에 평행한 직선의 기울기는 3이다.

따라서 점 $(3, -3)$ 을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y+3=3(x-3), \text{ 즉 } y=3x-12$$

이 직선이 점 $\left(\frac{2}{3}, k\right)$ 를 지나므로

$$k=3 \times \frac{2}{3} - 12 = -10$$

답 -10

03

|주안점| 두 직선이 서로 수직이거나 평행할 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 직선 $2x-y+6=0$, 즉 $y=2x+6$ 의 기울기는 2이

고 직선 $2x+ay-3=0$, 즉 $y=-\frac{2}{a}x+\frac{3}{a}$ 의 기울기는

$$-\frac{2}{a} \text{이므로}$$

I 대단원 평가문제

01

두 점 $A(-1, 4)$ 와 $B(a, b)$ 에 대하여 선분 AB를 4:1로 내분하는 점은 x 축 위에 있고, 1:3으로 내분하는 점은 y 축 위에 있을 때, $a+b$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

02

직선 $3x-y-8=0$ 과 평행하고 점 $(3, -3)$ 을 지나는 직선이 점 $\left(\frac{2}{3}, k\right)$ 를 지날 때, k 의 값을 구하시오.

03

직선 $2x-y+6=0$ 이 직선 $2x+ay-3=0$ 과 수직이고 직선 $(2-b)x+3y+1=0$ 과 평행할 때, 상수 a 와 b 에 대하여 ab 의 값을 구하시오.

04

두 점 $A(-2, -4)$ 와 $B(4, 8)$ 에 대하여 원점과 선분 AB의 수직이등분선 사이의 거리를 구하시오.

05

두 직선 $3x+y-2=0$ 과 $x-3y+6=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선 중에서 기울기가 음수인 직선의 방정식을 구하시오.

06

두 점 $(4, 5)$ 와 $(-2, -1)$ 을 지나고 중심이 y 축 위에 있는 원의 방정식을 구하시오.

07

세 점 $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(-2, 6)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표를 (p, q) 라 할 때, $p+q$ 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

08

방정식 $x^2+y^2+6x-4y+k+1=0$ 이 나타내는 도형이 원이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.

57

$$2 \times \left(-\frac{2}{a} \right) = -1, \quad a=4$$

또, 직선 $(2-b)x+3y+1=0$, 즉 $y=\frac{b-2}{3}x-\frac{1}{3}$ 의 기

울기는 $\frac{b-2}{3}$ 이므로

$$\frac{b-2}{3}=2, \quad b=8$$

따라서 $ab=4 \times 8=32$

답 32

04

|주안점| 한 직선에 수직인 직선의 방정식을 구하고, 이 직선과 한 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

|풀이| 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-4+8}{2} \right), \text{ 즉 } (1, 2)$$

직선 AB의 기울기는

$$\frac{8-(-4)}{4-(-2)}=2$$

이므로 선분 AB의 중점을 지나고 선분 AB와 수직인 직선의 방정식은

I 대단원 평가문제

09

직선 $2x+y-3=0$ 에 평행하고 원 $x^2+y^2=25$ 에 접하는 직선이 점 $(-\sqrt{5}, a)$ 를 지날 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

10

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a, 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $x-\frac{4}{3}y+b=0$ 일 때, $a+3b+r$ 의 값을 구하시오.
(단, $r>0$ 이고 b 는 상수)

11

직선 $2x+y-4=0$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동하면 직선 $2x+y-3=0$ 과 일치한다. 이때 상수 a 의 값을 구하시오.

12

원 $(x+a)^2+(y-4)^2=4$ 을 x 축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 원이 y 축에 접할 때, 상수 a 의 값을 모두 구하시오.

13

점 $(3, a)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 다음 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(2, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

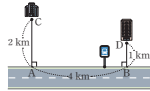
- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

14

직선 $x+y-4=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $x^2+y^2+ax-4y-6=0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

15

다음 그림과 같이 직선으로 뚫은 도로변에 4km 떨어진 두 지점 A와 B로부터 각각 수직으로 2km와 1km 떨어진 지점에 두 건물 C와 D가 있다. 도로변에 버스 정류장을 만들려고 할 때, 두 건물에서 버스 정류장까지의 거리의 합의 최솟값을 구하시오.



58

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$$

즉, $x+2y-5=0$

따라서 원점과 직선 $x+2y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

05

|주안점| 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 점은 두 직선과 거리가 같다는 것을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x+y-2|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|x-3y+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}},$$

$$|3x+y-2|=|x-3y+6|,$$

$$3x+y-2=\pm(x-3y+6)$$

이 식을 정리하면

$$y=-\frac{1}{2}x+2 \text{ 또는 } y=2x+2$$

그런데 구하는 직선의 기울기가 음수이므로

$$y=-\frac{1}{2}x+2$$

답 $y=-\frac{1}{2}x+2$

06

|주안점| 두 점을 지나고 중심이 좌표축 위에 있는 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 중심의 좌표를 $(0, k)$ 라 하면 두 점 $(4, 5)$ 와 $(-2, -1)$ 에서 원의 중심까지의 거리가 같으므로

$$\sqrt{(4-0)^2+(5-k)^2}=\sqrt{(-2-0)^2+(-1-k)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$12k=36, \text{ 즉 } k=3$$

원의 반지름의 길이를 r 이라 하면 원의 방정식은

$$x^2+(y-3)^2=r^2$$

이 원이 점 $(4, 5)$ 를 지나므로

$$4^2+(5-3)^2=r^2,$$

$$r^2=20$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+(y-3)^2=20$$

답 $x^2+(y-3)^2=20$

07

|주안점| 세 점을 지나는 원의 중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

|풀이 1| 세 점 $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(-2, 6)$ 에서 원의 중심 (p, q) 까지의 거리가 같으므로

$$\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{(p-4)^2+q^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-8p+16=0, \text{ 즉 } p=2$$

또, $\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{(p+2)^2+(q-6)^2}$ 이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$$4p-12q+40=0$$

이 식에 $p=2$ 를 대입하면

$$-12q=-48, \text{ 즉 } q=4$$

따라서 $p+q=2+4=6$

|풀이 2| 세 점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \text{이라 하자.}$$

이 원이 세 점 $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(-2, 6)$ 을 지나므로

$$C = 0,$$

$$16 + 4A + C = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$40 - 2A + 6B + C = 0 \quad \dots\dots ②$$

$C = 0$ 을 ①과 ②에 대입한 후 연립하여 풀면

$$A = -4, B = -8$$

이므로 세 점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0$$

$$\text{즉, } (x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(2, 4)$ 이므로

$$p+q = 2+4 = 6$$

☞ ③

08

|주안점| x, y 에 대한 이차방정식이 원의 방정식이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구할 수 있게 한다.

|풀이| 주어진 방정식을 변형하면

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 12 - k$$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이 되려면 $12 - k > 0$ 이어야 하므로

$$k < 12$$

☞ $k < 12$

09

|주안점| 기울기가 주어졌을 때 원의 접선의 방정식을 구하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| 직선 $2x + y - 3 = 0$, 즉 $y = -2x + 3$ 의 기울기는 -2 이다.

기울기가 -2 이고 원 $x^2 + y^2 = 25$ 에 접하는 직선의 방정식은

$$y = -2x \pm 5\sqrt{(-2)^2 + 1}$$

$$\text{즉, } y = -2x \pm 5\sqrt{5}$$

이 직선이 점 $(-\sqrt{5}, a)$ 를 지나므로

$$a = -2 \times (-\sqrt{5}) \pm 5\sqrt{5}$$

$$a = 7\sqrt{5} \text{ 또는 } a = -3\sqrt{5}$$

따라서 양수 a 의 값은 $7\sqrt{5}$

☞ $7\sqrt{5}$

16년부터 18년까지 서술형입니다.

16*

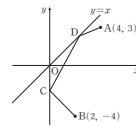
삼각형 ABC에서 꼭짓점 A의 좌표가 $(5, -2)$ 이고 변 BC의 중점의 좌표가 $(-4, -5)$ 일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하시오.

17*

원 $x^2 + y^2 + 9x - 6y - 2 = 0$ 과 직선 $2x - y + 2 = 0$ 의 두 교점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

18*

다음 그림과 같이 두 점 A(4, 3)과 B(2, -4)에 대하여 서로 다른 두 점 C와 D가 각각 y축과 직선 $y=x$ 위에 있을 때, $\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CB}$ 의 최솟값을 구하시오.



정답을 맞힌 문항에 O표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취기준	성취도	복습
01 15	신분의 내분을 이해하고, 내분점의 좌표를 계산할 수 있다.	☺☹☹☹	12~16쪽
02 03	두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 탐구하고 이해한다.	☹☹☹☹	18~21쪽
04 05	점과 직선 사이의 거리를 구하고, 관련된 문제를 해결할 수 있다.	☹☹☹☹	23~25쪽
06 07 08	원의 방정식을 구하고, 그래프를 그릴 수 있다.	☹☹☹☹	30~33쪽
09 10 17	좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 판단하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	☹☹☹☹	35~39쪽
11 12	평행이동을 탐구하고, 실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다.	☹☹☹☹	44~46쪽
13 14 15 18	원점, x축, y축, 직선 $y=x$ 에 대한 대칭이동을 탐구하고, 실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다.	☹☹☹☹	48~52쪽

인정 보충 부족

59

10

|주안점| 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 $(a, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$ax + 4y = r^2$$

이 식의 양변을 -3 으로 나누면

$$-\frac{a}{3}x - \frac{4}{3}y = -\frac{r^2}{3},$$

$$-\frac{a}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{r^2}{3} = 0$$

이 식을 $x - \frac{4}{3}y + b = 0$ 과 비교하면

$$-\frac{a}{3} = 1, \text{ 즉 } a = -3$$

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위에 점 $(-3, 4)$ 가 있으므로

$$(-3)^2 + 4^2 = r^2, \quad r^2 = 25$$

$$\text{즉, } r = 5$$

$$\text{또, } \frac{r^2}{3} = b \text{이므로}$$

$$b = \frac{25}{3}$$

$$\text{따라서 } a + 3b + r = -3 + 25 + 5 = 27$$

☞ 27

11

|주안점| 좌표평면에서 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $2x+y-4=0$ 에서 x 대신 $x-2$, y 대신 $y-a$ 를 대입하면

$$2(x-2)+(y-a)-4=0$$

$$\text{즉, } 2x+y-a-8=0$$

따라서 $-a-8=-3$ 이므로

$$a=-5$$

답 -5

12

|주안점| 좌표평면에서 평행이동한 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

|풀이| $(x+a)^2+(y-4)^2=4$ 에서 x 대신 $x+6$ 을 대입하면

$$\{(x+6)+a\}^2+(y-4)^2=4$$

$$\text{즉, } (x+6+a)^2+(y-4)^2=4$$

이 원의 중심의 좌표는 $(-6-a, 4)$

원이 y 축에 접하고 반지름의 길이가 2이므로

$$-6-a=2 \text{ 또는 } -6-a=-2$$

따라서 $a=-8$ 또는 $a=-4$

답 -8, -4

13

|주안점| 좌표평면에서 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 다음 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

|풀이| 점 $(3, a)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(a, 3)$$

점 $(a, 3)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(a, -3)$$

따라서 $a=2$, $b=-3$ 이므로

$$a+b=2+(-3)=-1$$

답 ②

14

|주안점| 좌표평면에서 원점에 대하여 대칭이동한 직선을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

|풀이| $x+y-4=0$ 에서 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$(-x)+(-y)-4=0$$

$$\text{즉, } x+y+4=0$$

$x^2+y^2+ax-4y-6=0$ 을 변형하면

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-2)^2=10+\frac{a^2}{4}$$

이므로 원의 중심의 좌표는

$$\left(-\frac{a}{2}, 2\right)$$

직선 $x+y+4=0$ 이 이 원의 중심을 지나므로

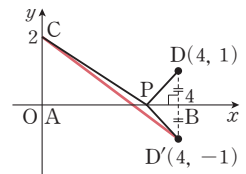
$$-\frac{a}{2}+2+4=0, \quad a=12$$

답 12

15

|주안점| 주어진 상황을 좌표평면에 나타내어 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다. x 축에 대하여 같은 방향에 두 점이 있을 때, 두 점 중 한 점을 x 축에 대하여 대칭이동하면 구하는 거리의 합이 최소가 되는 상황을 하나의 선분으로 나타낼 수 있게 한다.

|풀이| 오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x 축으로 하고, 직선 AC를 y 축으로 하는 좌표평면을 그리면



$$A(0, 0), \quad B(4, 0)$$

$$C(0, 2), \quad D(4, 1)$$

이고, 점 D를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 D'이라 하면

$$D'(4, -1)$$

이때 버스 정류장이 나타내는 점을 P라 하면 $\overline{PD}=\overline{PD'}$ 이므로

$$\overline{CP}+\overline{PD}=\overline{CP}+\overline{PD'}$$

$$\geq \overline{CD'}$$

$$=\sqrt{(4-0)^2+(-1-2)^2}$$

$$=5$$

따라서 두 건물에서 버스 정류장까지의 거리의 합의 최솟값은 5 km이다.

답 5 km

16

|주안점| 좌표평면에서 내분을 이용하여 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

문제 이해 삼각형 ABC의 무게중심은 중선을 꼭짓점으로 부터 2:1로 내분하는 점이다. ▶ 30%

해결 과정 변 BC의 중점을 M이라 하면

$$M(-4, -5)$$

선분 AM을 2:1로 내분하는 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{2 \times (-4) + 1 \times 5}{2+1} = -1,$$

$$y = \frac{2 \times (-5) + 1 \times (-2)}{2+1} = -4 \quad \blacktriangleright 50\%$$

답 구하기 따라서 구하는 무게중심의 좌표는

$$(-1, -4) \quad \blacktriangleright 20\%$$

17

|주안점| 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

해결 과정 $2x - y + 2 = 0$ 에서

$$y = 2x + 2$$

이 식을 $x^2 + y^2 + 9x - 6y - 2 = 0$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2 + x - 2 = 0, \quad (x+2)(x-1) = 0$$

$$\text{즉, } x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \quad \blacktriangleright 30\%$$

$$x = -2 \text{ 일 때 } y = -2,$$

$$x = 1 \text{ 일 때 } y = 4$$

이므로 원과 직선의 두 교점의 좌표는

$$(-2, -2), (1, 4)$$

이고, 이 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 두 점을 잇는 선분의 중점과 같으므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{-2+4}{2}\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \quad \blacktriangleright 50\%$$

답 구하기 따라서 $a = -\frac{1}{2}, b = 1$ 이므로

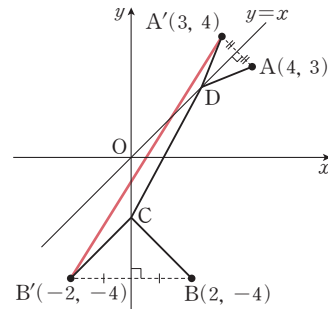
$$a + b = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \quad \blacktriangleright 20\%$$

18

|주안점| 좌표평면에서 대칭이동을 이용하여 선분의 길이의 합의 최솟값을 구할 수 있게 한다.

해결 과정 다음 그림과 같이 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 B를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$$A'(3, 4), B'(-2, -4) \quad \blacktriangleright 40\%$$



$$\overline{AD} = \overline{A'D} \text{ 이고 } \overline{CB} = \overline{CB'} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CB} = \overline{A'D} + \overline{DC} + \overline{CB'}$$

$$\geq \overline{A'B'}$$

$$= \sqrt{(-2-3)^2 + (-4-4)^2}$$

$$= \sqrt{89}$$

$\blacktriangleright 40\%$

답 구하기 따라서 $\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CB}$ 의 최솟값은 $\sqrt{89}$ 이다.

$\blacktriangleright 20\%$

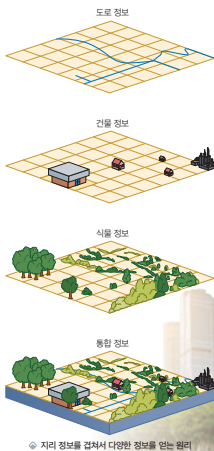


꿈을 이루는
수학

지리 정보 시스템 기사, 도형의 방정식으로 길을 밝히다!

지리 정보 시스템 기사는 국토 공간에 존재하는 각종 위치와 속성 등을 정보화한 지리 정보 시스템 (GIS: Geographic Information System) 자료를 설계, 유지, 수정하여 이를 사용하여 과학적, 기술적, 관련 전문가들에게 필요한 지원을 한다.

또한, 공간 분석, 데이터 조작 또는 지도 제작 소프트웨어를 사용하여 지리 공간 데이터를 구축하거나 모델링하고 전문적인 분석을 수행하여, 사용자를 대상으로 기술 지원을 제공한다.



목적지만 입력하면 자동차로 갈 수 있는 빠른 길을 안내해 주는 내비게이션, 스마트폰으로 언제든지 볼 수 있는 지도와 그 지도에서 검색할 수 있는 여러 가지 정보는 모두 지리 정보 시스템을 활용한 것이다.

지리 정보 시스템은 땅을 점, 선, 면을 이용하여 그래픽으로 바꾸어 다양한 정보를 저장하고 표현하는 시스템으로, 쉽게 표현하면 종이 지도와 컴퓨터가 결합한 것이다.

지리 정보 시스템은 실제 우리가 살고 있는 지역을 기반으로 하여 구축하기 때문에 기본적으로 평면과 공간에 대한 이해가 필요하며, 이를 수치화하는 과정에서 필수적으로 좌표평면과 관련된 것들을 이용하게 된다.

(출처: 고령24, 2021)

◆ 지리 정보를 겹쳐서 다양한 정보를 얻는 원리



60

꿈을 이루는
수학

지리 정보 시스템 기사, 도형의 방정식으로 길을 밝히다!

지리 정보 시스템은 과거 인쇄물 형태로 이용하던 지도 및 지리 정보를 컴퓨터를 이용해 작성 및 관리하고, 여기서 얻은 지리 정보를 기초로 데이터를 수집, 분석, 가공하여 지형과 관련되는 모든 분야에 적용하기 위해 설계된 종합정보시스템을 말한다. 초창기 컴퓨터 기술 및 전자 지도 제작 방식의 발전 등에 의해 활성화된 GIS는 지도 제작 성격이 강하였다. 그러나 이후 정보기술 분야의 기술이 발달되고, 이 발전된 기술이 GIS 분야에 적용되기 시작하면서 GIS 성격과 모습이 달라지게 되었다.

우리나라는 국토교통부 주도로 1995년부터 국가 지리 정보 체계(NGIS: National Geographic Information System) 사업을 추진하였으며, 국가 공간 정보 공동 활용을 위해 국토교통부 국가 공간 정보 통합 체계를 개발하였다. 국가 공간 정보 통합 체계는 토지, 자원, 환경, 시설물 등 국토 공간에 관한 제반 정보를 디지털화하여 공유·활용할 수 있도록 하는 국가 차원의 지리 정보 체계 구축이다.

진로 정보 관련 Tips 지리 정보 시스템 기사

수행 업무	상하수도, 도로, 지하 매설물 등 각종 지리 정보의 데이터베이스를 구축, 관리하기 위한 지리 정보 시스템을 설계하고, 이와 관련한 기술을 개발하고 활용 방안을 연구함.
소양	지리, 컴퓨터 그래픽, 디자인에 대한 지적 관심과 취미가 필요하며, 당면한 기술적 한계에 대한 도전 의식과 문제해결에 대한 강한 의지를 가진 사람에게 적합함. 각기 다른 분야의 사람들과 협의를 통해 작업하기 때문에 의사 소통 능력과 원만한 대인 관계 능력을 가진 사람에게 적합함.
적성	지리 정보에 대한 지식과 기술, 지리 관련 컴퓨터 소프트웨어 사용 방법, 측정된 지리 정보에 대한 수집 및 분석 등을 논리적으로 할 수 있는 수리·논리력이 필요함. 지표면과 지상 및 지하에 입체적으로 존재하는 자연환경과 인공 건축물에 대한 위치 및 지리 정보를 컴퓨터로 데이터화하여 분석 및 판단할 수 있는 공간지각력이 필요함.
학과	도시·지역학과, 도시공학과, 정보·통신공학과, 지구과학과, 지리학과
발전 방향	- 측량과 IT기술이 융합된 공간 정보의 활용 분야가 매우 다양해지고 있고, 관련 시장도 커지고 있음. - 지리 공간 정보의 활용성이 매우 커져 이제는 건설, 국방, 안전 등 거의 모든 분야에서 활용되고 있음. 가장 대표적인 분야인 내비게이션 서비스에서 활용되는 것 외에도 상하수도 등 지하 시설물 정보, 교통·물류 정보, 상권 정보, 부동산 정보, 방범 시스템 등의 구축 및 정보 제공 분야에서 공공 및 민간 수요가 증가하고 있음. - 향후에도 다양한 수요자를 위한 맞춤형 공간 정보 서비스 산업이 성장할 것으로 예상됨. - 정부 차원에서 위치 기반 서비스(LBS), 지능형 교통 체계(ITS) 등 다양한 융·복합 산업의 근간이 되는 국가 공간 정보를 구축하기 위해 정책적으로 투자를 지속하고 있음. - 그 밖에도 스마트폰 위치 기반 서비스, 3차원 영상 지도 개발, 게임 등 각종 IT 콘텐츠 개발에서 활용성이 커지고 있고, 최근에는 드론이나 자율주행 자동차의 기술 발전과 함께 지리 정보(공간 정보)가 더욱 중요해지고 있음.
연계 직업	도시 계획·설계, 교통 계획·설계, 교통 영향평가원, 지적 및 측량 기술자